2 次曲線の準線・焦点・頂点・曲率中心

― 2 次曲線の中心は定義関数の特異点 ―

前﨑　晴太

Maezaki　Haruta

指導教諭　西村　信一

要約

中間発表にて, 高速道路の標識の「r=~」に興味を持ち， その意味を知った後研究課題の焦点と準線， 放物線の内部にある頂点に接する円の中心や頂点の位置についての証明をした． 今回はそれに加えてf(x,y)=0の頂点や $f(x,y)=ax^2/2+bxy+cy^2/2+px+qy+r/2=0$ がどのようなグラフなのかを見分ける方法を証明した。

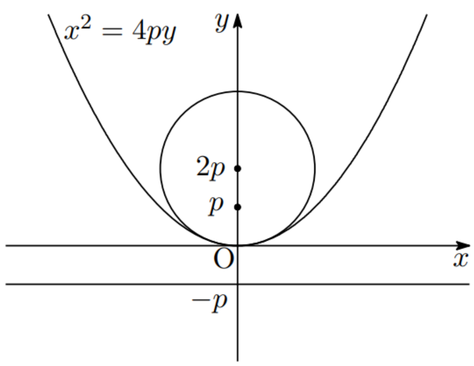
１.導入

2 次曲線は，準線，焦点など大域的な性質を扱う ことが多いが，局所的な視点から，放物線・楕円・ 双曲線の曲率中心と焦点，頂点，準線との位置関 係を離心率を介した考察を行った． 2 次曲線 f(x, y) = 0 の頂点は, |gradf(x, y)| が極値をとる点であることを証明した． また，2 次曲線 f(x, y) = 0 の中心は, 定義関数 の特異点と同値であることを証明し，中心の定義 を与えた.

２．　中間発表の振り返り

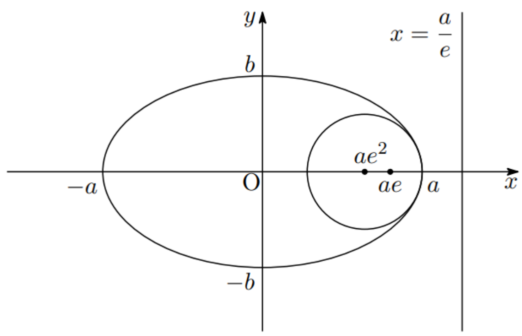
2.1 放物線 $x^2= 4py$ の曲率中心

放物線 $x^2 = 4py$ の頂点における曲率中心，焦点，頂点，準線が等間隔に並んでいる.



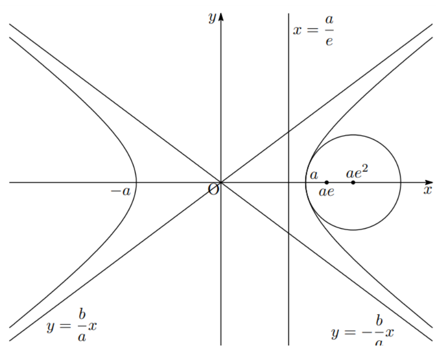
2.2 楕円 $x^2/a^2+ y^2/b^2 = 1$ の曲率中心

楕円 $x^2/ a^2 + y^2/ b^2 = 1$ (a > b) の頂点 (a, 0) における曲率中心，焦点，頂点，準線が x 軸上で等比点 列をなしている (e は離心率).



2.3 双曲線 $x^2/a^2 - y^2/ b^2 = 1$の曲率中心

双曲線 $x^2/ a^2- y^2/ b^2 = 1$ の頂点 (a, 0) における曲率 中心，焦点，頂点，準線が x 軸上で等比点列をな している (e は離心率).



3 本題

3.1 曲線 f(x, y) = 0 の曲率

f(x, y) の偏微分を fα = ∂/∂α×f(x, y), fαβ = ∂²/∂β∂α×f(x, y) と表記すると (α, β = x, y)，曲率 κ は

$$\kappa = \mathrm{sgn}(f_y)\frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{({f_x}^2 + {f_y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

なお，f(x, y) = 0 と −f(x, y) = 0 は一致するから，(1) の sgn(fy) の符号には本質的な違いはない． とくに，2 次曲線 f(x, y) = 0 について $f(x,y)=ax^2/2+bxy+cy^2/2+px+qy+r/2=0$ とすると、その曲率 κは

$$\kappa = \mathrm{sgn}(f_y)\frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix}}{({f_x}^2 + {f_y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) から，2 次曲線 f(x, y) = 0 の頂点は，曲線上 で $fx^2 + fy^2$が極値をとる点である．

3.2 2次曲線 f(x, y) = 0 の中心

2 次曲線の頂点は曲線上の点であるが，2 次曲線 の中心は R^2の点として考える必要があるから，中 心について次のように定義する．

定義 (中心)

$K \subset R^2$ とする．点 $p \in R^2$ に対し，任意の点 $q \in K$ の p に対する対称な点 q' が，$q' \in K$ であるとき，p は K の**中心**という．

定理 (中心は定義関数の特異点)

2 次曲線 $f^{-1}(0) \neq \phi$ に対し，$(\alpha,\ \beta) \in R^2$ が

$$f_x(\alpha,\ \beta) = f_y(\alpha,\ \beta) = 0 \quad (\text{特異点})$$

であることは，$(\alpha,\ \beta) \in R^2$ が $f^{-1}(0)$ の中心であるための必要十分条件である．

3.3 2 次曲線の分類

退化しない 2 次曲線，すなわち，楕円，双曲線， 放物線となるとき，曲率 κ 6= 0 である．(2) から，

$$\begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

のとき，

2 次曲線 f(x, y) = 0 は退化する． 一般に，2 次曲線は，次のように分類される．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(I)} & \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \\ \text{(II)} & \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C = 0\ (C \neq 0) \\ \text{(III)} & \lambda_1 X^2 + 2\mu Y = 0\ (\mu \neq 0) \end{array}\right\} \quad (3)$$

2 次曲線の中心と定義関数の特異点が同値である から，(3) において，(I)，(II) は中心が存在する有 心 2 次曲線であり，(III) は中心が存在しない無心 2 次曲線である． 中心 (α, β) が f −1 (0) 上にあるとき，

$$\begin{vmatrix} a & b & f_x \\ b & c & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & p \\ b & c & q \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

(I) は，κ = 0 であり，次のように分類される

• $ac - b^2 > 0$ のとき，1 点 (中心は 1 点)

• $ac - b^2 = 0$ のとき，1 つの実直線 (中心は実直線上の点 [非孤立特異点])

• $ac - b^2 < 0$ のとき，相交わる 2 直線 (中心は 2 直線の交点) (II) は，λ1λ2 = $ac - b^2$ より分類される．

• $ac - b^2 > 0$ のとき，楕円型

• $ac - b^2 < 0$ のとき，双曲線

• $ac - b^2 = 0$ のとき，平行 2 直線 (III) は，放物線で，定義関数の特異点が存在しない無心 2 次曲線である．

4 結果

上記より, 関数f(x,y)の形であったとしてもそれぞれの基本形に直すことができた. これによって中間発表でやった内容に当てはめることができ, 二次曲線であるなら内部の半径の大きさを求めることができるようになった.

5 展望

もしかしたら二次曲線以外でも， n次曲線型の求め方（一般化）があるのかもしれないが,ひとまずは二次曲線の研究をより深めていきたい。

６　参考文献

https://math4u.site/temp/paper.pdf
2 次曲線の中心は定義関数の特異点
（本発表内容の詳しい証明）